ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ (ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ)

Εστω $\varphi: E \to E$ (ενδομορφισμός) με E: Ευκλείδειος είναι ισομετρία αν.ν ο πίνακας του σε μια ορθοκανονική βάση είναι ορθογώνιος

Παραδείγματα:

Ενας πίνακας του μετασχηματισμού στροφής

$R_\theta: \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = A \Rightarrow$ Η στροφή είναι ισομετρία

και ${}^tA = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ωστε $A\,{}^tA = I_n = {}^tA A$

Επίσης η ανάκλαση είναι ισομετρία

$K_{\theta/2}: \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = A$ και ${}^tA = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

ωστε $A\,{}^tA = I = {}^tA A$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΙΣΟΜΕΤΡΙΩΝ ΣΤΟ $\mathbb{R}^2$

Εστω φ ισομετρία και $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ πίνακας αυτής

Αρα, ο πίνακας ορθογώνιος

Συνεπώς, $\alpha^2+\gamma^2=1$ & $\beta^2+\delta^2=1$ & $\alpha\beta+\gamma\delta=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \theta \in [0,2\pi]$: $\alpha=\cos\theta$ & $\gamma=\sin\theta$ καθώς επίσης

$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$: $\beta=-\lambda\sin\theta$ & $\delta=\lambda\cos\theta \Rightarrow \lambda=\pm 1$

Αρα, καταλήγουμε ότι ο πίνακας της ισομετρίας είναι πίνακας στροφής ή πίνακας ανάκλασης

Συμπέρασμα:

Αν $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ισομετρία τότε οι αναλυτικές εξισώσεις είναι οι εξής:

$$\underbrace{\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}}_{\text{στροφή}} \underbrace{\begin{aligned} &+ a \\ &+ b \end{aligned}}_{\text{μεταφ}} \quad \text{ή} \quad \underbrace{\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta - y\cos\theta \end{aligned}}_{\text{κατοπτρισμ.}} \underbrace{\begin{aligned} &+ a \\ &+ b \end{aligned}}_{\text{μεταφ}}$$

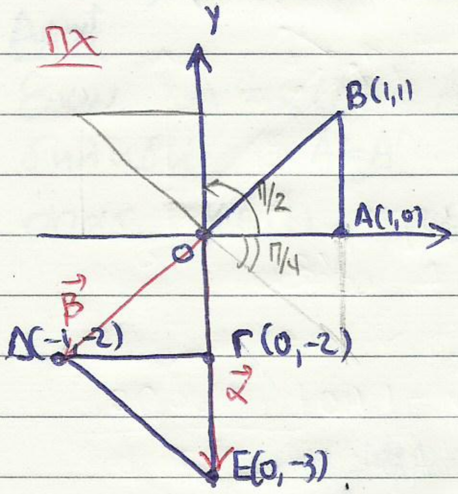
(Αλλά θα το αποδείξουμε παρακάτω)

ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΔΕΟΝΤΑΙ ΜΕ ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

σύνολο ισομετ.

Δύο σχήματα Σ_1, Σ_2 θα είναι ίσα αν $\exists\, \varphi \in Isom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ τ.ω $\varphi(\Sigma_1) = \Sigma_2$.

πχ



κατοπτρισμός κατά $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$

$O(0,0) \mapsto (0,0)$

$A(1,0) \mapsto (1,0)$

$B(1,1) \mapsto (1,-1)$

Έπειτα παράλληλη μεταφορά: προς το $\vec{B} = (-1,2)$

$O(0,0) \mapsto (-1,2)$

$A(1,0) \mapsto (1,0) + (-1,-2) = (0,-2)$

$(1,-1) \mapsto (1,-1) + (-1,-2) = (0,-3)$

Αλλιώς αν κάνουμε στροφή κατά $\theta = \frac{\pi}{2}$ και έπειτα κάνουμε παράλληλη μεταφορά προς το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (0,-3)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν φ ισομετρία και η φ γραμμική $\Rightarrow$ η φ θα λέγεται γραμμική ισομετρία ή ορθογώνιος μετασχηματισμός

(Θυμίζουμε φ γραμμική αν $\varphi: V_1 \to V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}) \\ (2)\ \varphi(\lambda\vec{x}) = |\lambda|\varphi(\vec{x}) \end{cases}$)

(Θυμίζουμε επίσης ότι $\varphi: (V_1, \langle\_,\_\rangle) \to (V_2, \langle\_,\_\rangle)$ διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο αν $\langle\vec{\alpha}, \vec{B}\rangle = \langle\varphi(\vec{\alpha}), \varphi(\vec{B})\rangle$)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Εστω $(V_1,<,>)$ και $(V_2,<,>)$ δυο πραγματικοί δ. χώροι τοτε κάθε ισομετρία γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως αθροισμα ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού και ενός διανύσματος. Επιπλέον, αν μια ισομετρία $\varphi: V_1 \to V_2$ διαφέρει απο μια γραμμική απεικόνιση $g: V_1 \to V_2$ κατά μια σταθερά α, τοτε g ορθογώνιος μετασχηματισμός με $\alpha = \varphi(0)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Γραμμική Άλγεβρα)

Εστω V και U δx εφοδιασμένοι με το εσωτερ. γινόμενο και εστω $\varphi: V \to U$ ισομετρία τοτε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

α) Η φ ορθογώνιος μετασχημ.

β) $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$

γ) $|\varphi(\bar{u})| = |\bar{u}|$, $\forall u \in V$

δ) $<\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})> = <u,v>$, $\forall u,v \in V$

Αποδειξη:

1ο σκελος

Εστω $\varphi: V_1 \to V_2$ ισομετρία

Ορίζουμε $g: V_1 \to V_2$ ώστε $g(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) - \varphi(\vec{0})$

Παρατηρήσεις:

- $g(0) = 0$
- $|g(\bar{v})| = |\varphi(\bar{v}) - \varphi(\bar{0})| \overset{\text{ισομ.}}{=} |\bar{v} - \bar{0}| = |\bar{v}|$
- $g(\bar{v})$ ισομετρία $\Leftrightarrow |g(\bar{v}) - g(\bar{w})| = |\varphi(\bar{v}) - \varphi(\bar{w})| \overset{\text{ισομ}}{=} |\bar{v} - \bar{w}|$
- $|g(\bar{u}) - g(\bar{v})| \overset{g\,\text{ισομ}}{=} |\bar{u} - \bar{v}| \Leftrightarrow |g(\bar{u}) - g(\bar{v})|^2 = |\bar{u} - \bar{v}|^2 \Rightarrow$
  $\Leftrightarrow |g(\bar{u})|^2 - 2g(\bar{u})g(\bar{v}) + |g(\bar{v})|^2 = |\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\bar{v} + |\bar{v}|^2 \Rightarrow$
  $\Leftrightarrow <g(\bar{u}), g(\bar{v})> = <\bar{u}, \bar{v}>$, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V_1$

Ετσι, g ορθογώνιος και θετουμε $\vec{\alpha} = \varphi(\vec{0})$

Άρα, $g(\bar{v}) + \varphi(\bar{0}) = \varphi(\vec{v})$ ← το ζητούμενο

2ο σκελος (Μοναδικότητα)

Εστω $\exists$ h ορθογώνιος και σταθ $\vec{b}$: $\varphi(\bar{u}) = h(\bar{u}) + \vec{b}$ ⊛

$\vec{b} = \varphi(\bar{0}) - h(\bar{0}) \underset{h(0)=0}{\overset{h\,\text{ορθ}}{=}} \varphi(\bar{0}) = \vec{\alpha}$

Απο ⊛ $h(\bar{u}) = \varphi(\bar{u}) - b = \varphi(\bar{u}) - \varphi(0) = g(\bar{u})$

ΠΧ Μία ισομετρία απεικονίζει ευθεία $\xmapsto{\varphi}$ ευθεία

Έστω φ ισομετρία λοιπόν ώστε $A \longmapsto \varphi(A) = A'$
και $B \longmapsto \varphi(B) = B'$ και έστω X τυχόν σημείο του AB. Θδο $\varphi(X) = X'$ σημείο στην ευθεία $A'B'$

Έστω λοιπόν ότι X' όχι συνευθειακό με τα A', B'
Συνεπώς, ορίζεται τρίγωνο $X'\hat{A'}B'$.

$|A'X'| + |X'B'| \overset{\text{ισομ.}}{=} |AX| + |XB| = |AB| \overset{\text{ισομ.}}{=} |A'B'|$ Άτοπο από την τριγωνική ανισοτητα

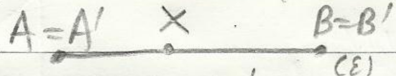
ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν μία ευθεία διατηρεί δύο σημεία Α, Β της ευθείας σταθερα τότε αυτή διατηρεί και όλα τα υπόλοιπα της σταθερα.

Αποδ

Έστω $A = \varphi(A) = A'$ και $B = \varphi(B) = B'$

δηλαδή



όπως $X \in (\varepsilon)$ τότε $X' \in (\varepsilon')$; $A'B' = AB$.